

# Xác định miền cường độ của vật liệu không đồng nhất sử dụng lý thuyết phân tích giới hạn và kỹ thuật đồng nhất hóa

Nguyễn Hoàng Phương

Khoa Kiến trúc - Xây dựng - Mỹ thuật ứng dụng, Đại học Nguyễn Tất Thành  
nhphuong@ntt.edu.vn

## Tóm tắt

Bài báo này trình bày phương pháp xác định miền giới hạn vật liệu không đồng nhất bằng sự kết hợp thuật đồng nhất hóa và lý thuyết phân tích giới hạn. Bài toán phân tích giới hạn cho một phần tử đại diện (RVE) được xem xét nhằm tìm được tải trọng giới hạn của các trường hợp tải trọng khác nhau. Miền tải trọng biến thiên đại diện cho các trường hợp ứng suất tương ứng của một điểm vật liệu được khảo sát. Việc áp dụng rời rạc hóa miền chuyển vị biến thiên trong bài toán phân tích giới hạn nhằm tạo điều kiện thuận lợi trong việc khai báo điều kiện biên tuần hoàn cho bài toán. Bài toán phân tích giới hạn tích hợp lý thuyết đồng nhất hóa được triển khai dưới dạng bài toán tối ưu hình nón bậc hai (SOCP). Các trường hợp tải trọng giới hạn của phần tử đại diện hình thành miền giới hạn của một vật liệu không đồng nhất. Ví dụ số được thực hiện và so sánh với các nghiên cứu của các tác giả khác về cường độ vật liệu không đồng nhất nhằm thể hiện sự hiệu quả của phương pháp.

Nhận 27.12.2017  
Được duyệt 21.01.2018  
Công bố 01.02.2018

## Từ khóa

Phân tích giới hạn, kỹ thuật đồng nhất hóa, miền cường độ của vật liệu không đồng nhất, chương trình tối ưu hóa hình nón bậc hai (SOCP)

© 2018 Journal of Science and Technology - NTTU

## 1. Giới thiệu

Việc trộn lẫn các vật liệu khác nhau để tạo thành các vật liệu mới, vật liệu không đồng nhất, đang ngày càng trở nên phổ biến trong các cấu kiện của công trình. Qua đó, nhu cầu về việc xác định các tiêu chuẩn dẻo của các vật liệu mới này chiếm vai trò quan trọng trong việc tính toán và ước lượng khả năng làm việc của kết cấu. Hiện nay, hầu hết các tính chất này được thống kê và tính toán thông qua các thí nghiệm thực tế. Việc này sẽ dẫn đến chi phí cho việc xác định tính chất của vật liệu là rất lớn. Vì vậy, các mô phỏng số được thực hiện nhằm giảm thiểu các chi phí thí nghiệm này. Hơn thế nữa, chúng ta cần các phương pháp hiệu quả và nhanh chóng để có thể tiết kiệm về thời gian tính toán. Các nghiên cứu trước đây đã chứng tỏ được sự hiệu quả về nghiệm và thời gian tính toán của bài toán phân tích giới hạn trong việc xác định cường độ của vật liệu không đồng nhất [1,2]. Tuy nhiên, mặt hạn chế về các vòng lặp làm thời gian tính toán khá lớn. Việc kết hợp giữa lý thuyết đồng nhất hóa và phân tích giới hạn có thể giải quyết được yêu cầu này.

Trong những năm gần đây, các nghiên cứu xác định cường độ của vật liệu không đồng nhất, phân tích giới hạn của kết cấu vi mô, ngày càng phát triển và được chú trọng. Lý thuyết đồng nhất hóa kết hợp phân tích giới hạn được đề xuất trong việc xác định cường độ vật liệu vi mô của vật liệu cốt sợi [4-6]. Một phân tích giới hạn đồng nhất hóa dựa

trên phần tử hữu hạn và phương trình tuyến tính được đề xuất trong [7] để tính toán cường độ vật liệu vĩ mô theo tiêu chuẩn Tresca. Ứng xử của hình lăng trụ có lỗ rỗng được nghiên cứu trong [8,9] bởi mô hình Gurson với cả trường động học và tĩnh học cũng như lý thuyết đồng nhất hóa. Dựa vào phần tử hữu hạn và thuật toán đổi ngẫu nhiên nội, một đề xuất của tiêu chuẩn cường độ cấp độ vĩ mô và phân tích ổn định của đất được gia cường bởi cọc đá được trình bày [10-14]. Trong trường hợp dành cho tấm tuần hoàn, một lý thuyết nghiên cứu về việc đồng nhất hóa miền cường độ của tấm Love-Kirchhoff nhiều lớp cứng dẻo lý tưởng được trình bày [15,16], và kết quả số thu được xác định tiêu chuẩn cường độ chịu uốn trong [17,18]. Bằng việc kết hợp kỹ thuật đồng nhất hóa, phân tích giới hạn động học và chương trình phi tuyến, tải trọng giới hạn và cơ cấu phá hoại của vật liệu composite tuần hoàn theo tiêu chuẩn chảy dẻo hình elip được xác định [19-24]. Sử dụng trường ứng suất đàn hồi của cấu trúc vi mô tuần hoàn, một phương pháp trực tiếp tĩnh học kết hợp với đồng nhất hóa được trình bày [25-29] trong bài toán phân tích giới hạn 2D và 3D cho vật liệu hỗn hợp kim loại tuần hoàn. Trong phương pháp này, dạng mạnh của phương trình cân bằng được xấp xỉ bằng dạng yếu, và được thỏa mãn trung bình bằng việc sử dụng trường chuyển vị. Dựa trên phương pháp tuyến tính, phân tích giới hạn của kết cấu bê tông cốt thép được nghiên cứu [30-34].

Mục tiêu của bài báo này là phát triển một lý thuyết đồng nhất hóa cho phân tích giới hạn của vật liệu tuần hoàn với trường chuyển vị biến thiên (tuần hoàn) được xấp xỉ. Năng lượng tiêu tán dẻo hay hàm mục tiêu được chuyển về dạng tổng bình phương. Ngoài ra, điều kiện biên tuần hoàn được áp cho biên chu vi phần tử đại diện RVE. Điều kiện công ngoại của phần tử đại diện được thay bằng công nội trên điểm vật liệu cấp độ vĩ mô. Qua đó, phương pháp phân tích giới hạn được kết hợp với lý thuyết đồng nhất hóa và được sử dụng trong bài báo này.

## 2. Lý thuyết phân tích giới hạn

Trong phần này, lý thuyết phân tích giới hạn được tóm lược. Một vật thể cứng dẻo lý tưởng được xem xét với biên  $\Gamma$  và chịu lực thể tích  $\mathbf{f}$  và lực bề mặt  $\mathbf{g}$  trên biên tĩnh học

$\Gamma_t$ . Biên động học  $\Gamma_u$  được ràng buộc và  $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ .

Công ngoại lực và công nội lực có thể được thể hiện thông qua

$$\cdot F(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{g}^T \mathbf{u} d\Gamma \quad (1)$$

$$U(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (2)$$

Với  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}]^T$  là ma trận biến dạng.

Hệ số tải trọng phá hoại chính xác có thể được xác định bằng cách giải một bài toán tối ưu hóa sau đây

$$\lambda = \max \{ \lambda^- | \exists \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{B} : U(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \lambda^- F(\mathbf{u}) \} \quad (3.1)$$

$$= \max_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{B}} \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{C}} U(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \quad (3.2)$$

$$= \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{C}} \max_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{B}} U(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \quad (3.3)$$

$$= \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{C}} D(\mathbf{u}) \quad (3.4)$$

Với năng lượng tiêu tán dẻo được kí hiệu  $D(\mathbf{u})$  là một hàm theo  $\boldsymbol{\sigma}$  và  $\mathbf{u}$  như sau

$$D(\mathbf{u}) = \max_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{B}} U(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B} = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{X} | \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) \leq 0 \} \quad (4.2)$$

Với  $\varphi(\boldsymbol{\sigma})$  được gọi là tiêu chuẩn dẻo. Phương trình (3.1) và (3.4) là phương trình tĩnh học và động học của bài toán phân tích giới hạn. Phương trình động học (3.4) sẽ được sử dụng trong bài báo này.

Hầu hết các tiêu chuẩn dẻo hiện nay đều có thể được biểu diễn như sau

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} - 1 \quad (5)$$

Với  $\mathbf{P}$  là một ma trận hữu hiệu bao gồm các hệ số của phương trình cường độ của vật liệu. Trong trường hợp tiêu chuẩn von Mises,  $\mathbf{P}$  được áp dụng với vật liệu đẳng hướng và ứng suất phẳng

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Với  $\sigma_0$  là ứng suất chảy dẻo kéo dọc trục. Bên cạnh đó, trong trường hợp là vật liệu bất đẳng hướng như tiêu chuẩn của Hill, ma trận  $\mathbf{P}$  khi đó là

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} G+H & -H & 0 \\ -H & H+F & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \quad (7)$$

Với  $G, H, F$  và  $N$  là các hằng số đặc trưng của vật liệu bất đẳng hướng và được xác định như sau

$$\begin{cases} 2H = \frac{1}{\sigma_{xx}^2} + \frac{1}{\sigma_{yy}^2} - \frac{1}{\sigma_{zz}^2} \\ 2G = \frac{1}{\sigma_{xx}^2} + \frac{1}{\sigma_{zz}^2} - \frac{1}{\sigma_{yy}^2} \\ 2F = \frac{1}{\sigma_{zz}^2} + \frac{1}{\sigma_{yy}^2} - \frac{1}{\sigma_{xx}^2} \end{cases} \quad (8.1)$$

$$N = \frac{1}{\sigma_{xy}^2} \quad (8.2)$$

Với  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  lần lượt là ứng suất chảy dẻo kéo dọc trục theo ba trục và  $\sigma_{xy}$  là ứng suất chảy dẻo cắt.

Theo hướng tiếp cận động học của bài toán phân tích giới hạn, năng lượng tiêu tán dẻo được khai triển thành biểu thức với biến là biến dạng. Khi đó, năng lượng tiêu tán dẻo được viết lại như sau

$$D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \quad (9)$$

Với  $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{P}^{-1}$

## 3. Lý thuyết đồng nhất hóa

Xem xét một vật thể không đồng nhất cấp độ vĩ mô  $V \in \square^2$ . Theo các lý thuyết đã được xây dựng của chuyên đề I, bài toán kết cấu không đồng nhất ở cấp độ vĩ mô được thay thế bằng hai bài toán, đó là bài toán đồng nhất ở cấp độ vĩ mô và bài toán kết cấu không đồng nhất ở cấp độ vi mô. Điều quan trọng của phương pháp này là sự liên hệ giữa hai cấp độ này. Bên cạnh đó, bài toán cấp độ vi mô, phần tử đại diện (RVE), phải thỏa mãn các ràng buộc nhằm đảm bảo được sự liên hệ này.

Ngoài ra, kích thước của phần tử đại diện (RVE) đã được sự quan tâm rất lớn của các nhà nghiên cứu. Hơn thế nữa, kích thước này phải đủ nhỏ để thuận lợi cho việc tính toán nhưng lại phải đủ lớn khi so với các cốt liệu để có thể đặc

trung cho vật liệu. Trong nghiên cứu này, giả thiết rằng các cốt liệu rất nhỏ so với kích thước của phần tử đại diện (RVE).

Mối liên hệ giữa hai cấp độ được thể hiện qua định lý trung bình

$$\mathbf{E} \equiv \langle \boldsymbol{\varepsilon}_M \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_m d\Omega \quad (10.1)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv \langle \boldsymbol{\sigma}_M \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_m d\Omega \quad (10.2)$$

Với  $\boldsymbol{\varepsilon}_M, \boldsymbol{\sigma}_M$  lần lượt là biến dạng và ứng suất tại một điểm vật liệu của cấp độ vĩ mô.  $\boldsymbol{\varepsilon}_m, \boldsymbol{\sigma}_m$  lần lượt là biến dạng và ứng suất tại một điểm vật liệu của cấp độ vi mô. Kí hiệu  $\langle \bullet \rangle$  đại diện cho trung bình thể tích trên toàn bộ thể tích phần tử đại diện (RVE), và  $|\Omega|$  là diện tích của phần tử đại diện.

Khi tính toán ở cấp độ vi mô, biến dạng và ứng suất được phân ra hai thành phần. Đầu tiên là hằng số biến dạng và ứng suất của một chất điểm ở cấp độ vĩ mô. Phần còn lại sẽ là một biến dạng biến thiên và ứng suất biến thiên. Điều này được thể hiện như sau

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m(\mathbf{x}) \quad (11.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m(\mathbf{x}) \quad (11.2)$$

Qua đó, chuyển vị trên RVE cũng được thể hiện bằng hai thành phần

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}_m(\mathbf{x}) \quad (12)$$

Định lý trung bình (10.1), (10.2) phải được đảm bảo. Do đó, trung bình thể tích của biến dạng biến thiên và ứng suất biến thiên trên RVE phải bị triệt tiêu

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \rangle = 0; \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m \rangle = 0 \quad (13)$$

Ngoài ra, chuyển vị trên biên của phần tử đại diện phải đảm bảo điều kiện tuần hoàn. Điều kiện tuần hoàn ở đây là tuần hoàn về chuyển vị và đối ngẫu về ứng suất trên các biên đối nhau. Điều này dẫn đến bất kì trường chuyển vị khả dĩ động và trường ứng suất cân bằng thỏa mãn điều kiện tuần hoàn đều thỏa điều kiện cân bằng năng lượng của Hill-Mandel

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\sigma}_m : \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle \quad (14)$$

#### 4. Tính toán đồng nhất hóa cho phân tích giới hạn

Những nghiên cứu trên thế giới [24-28] đã tính toán ứng suất đàn hồi của kết cấu vi mô tuần hoàn thông qua ứng suất  $\boldsymbol{\Sigma}$  hoặc biến dạng  $\mathbf{E}$  để xấp xỉ trong bài toán phân tích giới hạn. Gần đây, Jeremy và các cộng sự [17] đã công bố một nghiên cứu sử dụng đồng nhất hóa trong phân tích giới hạn tám tuần hoàn, qua đó trường động học đã được sử dụng thông qua biến độ cong. Tuy nhiên, trong nghiên cứu này trường động học ở cấp độ vi mô sẽ được sử dụng với

trường ứng suất tại cấp độ vĩ mô. Nhờ mối liên hệ giữa ứng suất tại một điểm vật liệu cấp độ vĩ mô và lực trên biên của phần tử đại diện. Do đó, khi xác định được lực giới hạn của phần tử đại diện đồng nghĩa với việc ta xác định được ứng suất cực đại tại một điểm vật liệu cấp độ vĩ mô.

Bên cạnh đó, các nghiên cứu trước đây sử dụng mô hình kéo nén theo hai phương kết hợp phép xoay góc để xác định dần không gian ứng suất giới hạn. Trong nghiên cứu này, ứng suất tiếp  $\sigma_{xy}$  đã được đưa vào mô hình nhằm trực tiếp tìm được không gian ứng suất giới hạn của vật liệu. Không gian ứng suất giới hạn của vật liệu này mô tả tiêu chuẩn chảy dẻo của vật liệu.

Bài toán phân tích giới hạn kết hợp lý thuyết đồng nhất hóa cho phần tử đại diện (RVE) được biểu diễn như sau

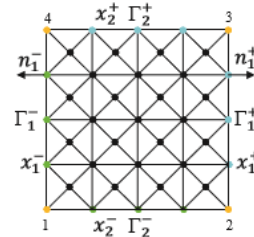
$$\lambda^+ = \min_{\Omega} \int_{\Omega} \sqrt{(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}_M)^T \Theta (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}_M)} d\Omega \quad (15.1)$$

$$\text{s.t} \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = V_0 \sum_0^T \boldsymbol{\varepsilon}_M = 1 \quad (15.2)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \text{ tuần hoàn trên biên } \Gamma_d \quad (15.3)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{u}} \text{ trong miền } \Omega \quad (15.4)$$

Bài toán tối ưu (15) được xây dựng trên việc xấp xỉ trường chuyển vị biến thiên ( $\tilde{\mathbf{u}}$ )



Hình 1. Điều kiện biên tuần hoàn

Điều kiện biên tuần hoàn được thực hiện thông qua việc cân bằng các cặp chuyển vị biến thiên đối xứng trên biên của phần tử đại diện (RVE).

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\Gamma_+} = \tilde{\mathbf{u}}_{\Gamma_-} \quad (16)$$

Với  $\Gamma_+, \Gamma_-$  lần lượt là biên chủ động và biên bị động tương ứng trên biên phần tử đại diện

Ta có thể biểu diễn mối quan hệ giữa các bậc tự do tuần hoàn thành công thức sau

$$\mathbf{C} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (17)$$

Với ma trận  $\mathbf{C}$  là ma trận ràng buộc giữa các bậc tự do tuần hoàn bao gồm các hệ số  $\{-1; 0; 1\}$

Triển khai bài toán với kỹ thuật rời rạc hóa phần tử hữu hạn và tích phân Gauss như sau

$$\lambda^+ = \min_{\Omega} \sum_{i=1}^{NG} \sigma^P \xi_i \sqrt{(\mathbf{B}_i \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}_M)^T \Theta (\mathbf{B}_i \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}_M)} \quad (18.1)$$

$$\text{s.t} \quad V_0 \sum_0^T \boldsymbol{\varepsilon}_M = 1 \quad (18.2)$$

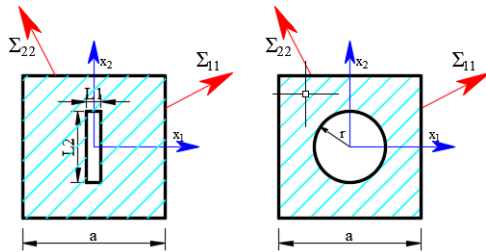
$$\mathbf{C} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (18.3)$$

## 5. Ví dụ số

Việc ứng dụng kỹ thuật đồng nhất hóa kết hợp với phân tích giới hạn cho kết cấu vi mô tuần hoàn được thực hiện cho trường hợp vật liệu có lỗ. Bài toán ứng suất phẳng được lập trình bằng ngôn ngữ Matlab và được giải bằng công cụ mosek[37]. Phần tử đại diện RVE có dạng hình vuông  $a \times a$  ( $a = 1\text{mm}$ ). Nghiệm của bài toán sẽ là tập hợp các tải trọng giới hạn của phần tử đại diện cũng như là ứng suất giới hạn của điểm vật liệu vi mô. Do đó, ứng suất giới hạn tại một điểm vật liệu cấp độ vi mô được xác định như sau

$$\Sigma_{\max} = \lambda^+ \Sigma_0 \quad (21)$$

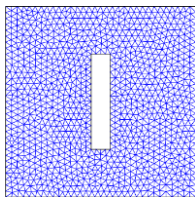
Vật liệu có lỗ rỗng được xem là một vật liệu hỗn hợp đặc biệt. RVE có lỗ hình chữ nhật và hình tròn tại tâm được thể hiện ở Hình 2



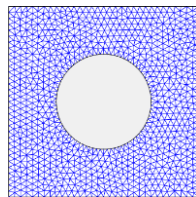
lỗ hình chữ nhật ( $L_1 \times L_2 = 0.1 \times 0.5\text{mm}$ )

và lỗ hình tròn ( $r/a = 0.25$ )

**Hình 2.** Bài toán RVE của vật liệu có lỗ rỗng



(a) 2038 phần tử T3



(b) 1752 phần tử T3

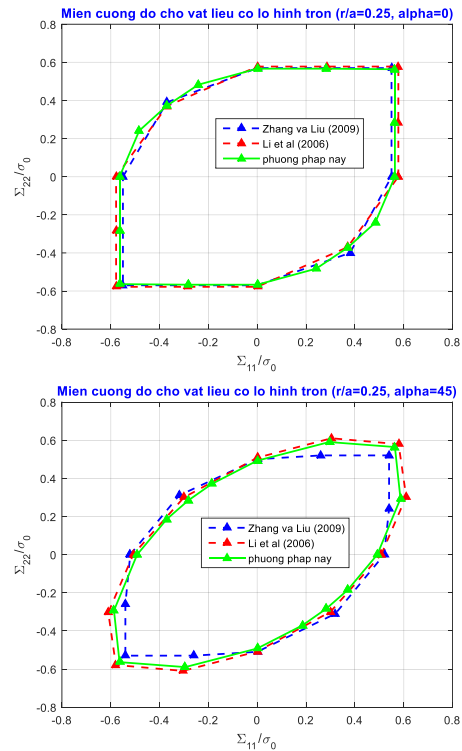
**Hình 3.** Lưới phần tử hữu hạn T3

bài toán lỗ tròn và lỗ hình chữ nhật

RVE chịu tác dụng của cặp lực vuông góc  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  trong mặt phẳng  $(x_1, x_2)$  như trong hình 2. Vật liệu nền cho RVE lỗ hình chữ nhật là *aluminium Al* với ứng suất chảy dẻo  $\sigma_0 = 137\text{ MPa}$ . Ngoài ra, vật liệu nền cho RVE lỗ hình tròn là *mild steel St3S* với ứng suất chảy dẻo  $\sigma_0 = 273\text{ MPa}$ . Bài toán này được so sánh với kết quả của Li [20,21] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn động học kết hợp với thuật giải lặp và Zhang và cộng sự [28] sử dụng hướng tiếp cận bán cận dưới.

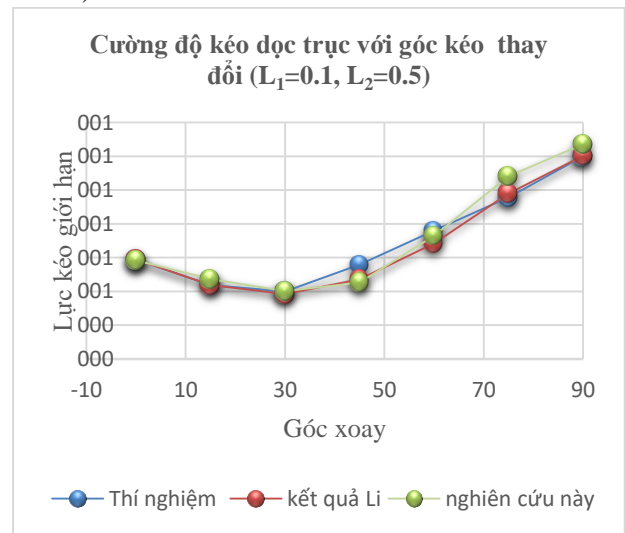
Phần tử hữu hạn tam giác ba nút (T3) được sử dụng cho mô hình tính toán như hình 3. Miền ứng suất giới hạn tại một điểm vật liệu có lỗ rỗng tròn với hai góc xoay khác nhau ( $\alpha = 0^\circ$  và  $\alpha = 45^\circ$ ) được trình bày theo hình 4. Các kết quả

phù hợp với kết quả của Li [20,21] và Zhang [28].



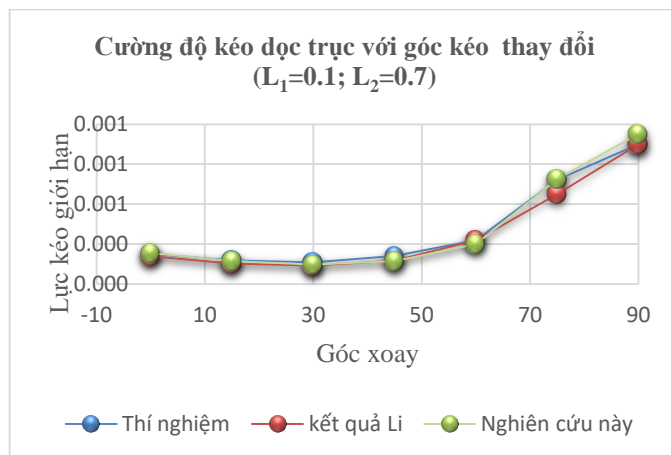
**Hình 4.** Miền ứng suất giới hạn của vật liệu có lỗ hình tròn ( $r/a=0.25$ )

Bên cạnh đó, ứng xử của vật liệu có lỗ được khảo sát khi kéo dọc trục có góc thay đổi dần  $[0^\circ - 90^\circ]$  với hai kích thước lỗ khác nhau  $L_2 = 0.5\text{ mm}$  và  $L_2 = 0.7\text{ mm}$ . Kết quả được thể hiện trong hình 5 và hình 6. Những kết quả này tương đồng với kết quả của Li [20] (chênh lệch khi góc xoay bằng không là 0.47%) và thí nghiệm của Litewka và các cộng sự [36] (chênh lệch khi góc xoay bằng không là 0.47%).



**Hình 5.** Cường độ kéo dọc trục với góc kéo thay đổi ( $L_1=0.1\text{mm}$ ;  $L_2=0.5\text{mm}$ )





**Hình 6.** Cường độ kéo dọc trục với góc kéo thay đổi ( $L_1=0.1\text{mm}$ ;  $L_2=0.7\text{mm}$ )

## Tài liệu tham khảo

1. M. A. Save, C. E. Massonnet, G. de Saxce. Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 43. Elsevier: Amsterdam, 1997
2. J. Salencon. Yield Design. Wiley.com, 2013.
3. Suquet, P. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In: Sanchez-Palencia, E., Zaoui, A. (Eds.), Homogenization Techniques for Composite Media, Lecture Notes in Physics, Springer, New York, 1987; 272, 193–278.
4. P. de Buhan, A. Taliercio. A homogenization approach to the yield strength of composite materials. European Journal of Mechanics - A/Solids 10 (1991) 129–154.
5. A. Taliercio. Lower and upper bounds to the macroscopic strength domain of a fiber-reinforced composite material. International Journal of Plasticity 8 (1992) 741–762.
6. A. Taliercio, P. Sagramoso. Uniaxial strength of polymeric-matrix fibrous composites predicted through a homogenization approach. International Journal of Solids and Structures 14 (1995) 2095–2123.
7. P. Franceseato, J. Pastor. Lower and upper numerical bounds to the off-axis strength of unidirectional fiber-reinforced composite by limit analysis methods. European Journal of Mechanics - A/Solids 16 (1997) 213–234.
8. T. H. Thai, P. Franceseato, J. Pastor. Limit analysis of unidirectional porous media. Mechanics Research Communications 25 (1998) 535–542.
9. M. Trillat, J. Pastor. Limit analysis and Gurson's Model. European Journal of Mechanics - A/Solids 24 (2005) 800–819
10. B. Jellali, M. Bouassida, P. de Buhan. A homogenization method for estimating the bearing capacity of soils reinforced by columns. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 29 (2005) 989–1004.
11. B. Jellali, M. Bouassida, P. de Buhan. Stability analysis of an embankment resting upon a column-reinforced soil. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 35 (2011) 1243–1256
12. G. Hassen, M. Gueguin, P. de Buhan. A homogenization approach for assessing the yield strength properties of stone column reinforced soils. European Journal of Mechanics A/Solids 37 (2013) 266–280.
13. M. Gueguin, G. Hassen, P. de Buhan. Numerical assessment of the macroscopic strength criterion of reinforced soils using semidefinite programming. International Journal for Numerical Methods in Engineering 99(2014) 522–541.
14. M. Gueguin, G. Hassen, P. de Buhan. Stability analysis of homogenized stone column reinforced foundations using a numerical yield design approach. Computers and Geotechnics 64 (2015) 10–19.
15. J. Dallot, K. Sab. Limit analysis of multi-layered plates. Part I: The homogenized Love-Kirchhoff model. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 56 (2008) 561–580.
16. J. Dallot, K. Sab. Limit analysis of multi-layered plates. Part II: Shear effects. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 56 (2008) 581–612.
17. J. Bleyer, P. de Buhan. A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. Part I: Construction of the macroscopic strength criterion. International Journal of Solids and Structures 51 (2014) 2448–2459.

## Kết luận

Bài báo này đã trình bày phương pháp kết hợp giữa lý thuyết đồng nhất hóa và lý thuyết phân tích giới hạn nhằm tìm được không gian ứng suất giới hạn của vật liệu vĩ mô. Trường chuyển vị biến thiên được xấp xỉ trong bài toán phân tích giới hạn phần tử đại diện RVE. Các trường hợp tải trọng giới hạn trên biên của phần tử đại diện đại diện cho không gian 2D ứng suất giới hạn của một điểm vật liệu vĩ mô. Bài toán được xem xét lần lượt là tấm có một lỗ hình tròn và hình chữ nhật. Nghiệm của bài toán thể hiện được không gian 2D ứng suất giới hạn tương đồng với các kết quả nghiên cứu khác.

18. J. Bleyer, P. de Buhan. A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. Part II: Upper bound yield design calculation of the homogenized structure. *International Journal of Solids and Structures* 51 (2014) 2460–2469.
19. V. Carvelli, G. Maier, A. Taliercio. Kinematic limit analysis of periodic heterogeneous media. *Computer Modeling in Engineering and Science* 1 (2000), 19–30.
20. H. X. Li, H. S. Yu. Limit analysis of composite materials based on an ellipsoid yield criterion. *International Journal of Plasticity* 22 (2006), 1962–1987.
21. H. X. Li, H. S. Yu. Limit analysis of ductile composites based on homogenization theory. *Proc. R. Soc. Lond. A* 459 (2003) 659–675.
22. H. X. Li. Limit analysis of composite materials with anisotropic microstructures: A homogenization approach. *Mechanics of Materials* 43 (2011) 574–585.
23. H. X. Li. Microscopic limit analysis of cohesive-frictional composites with nonassociated plastic flow. *European Journal of Mechanics A/Solids* 37 (2013) 281–293.
24. H. X. Li. A microscopic nonlinear programming approach to shakedown analysis of cohesive-frictional composites. *Composites: Part B* 50 (2013) 32–43.
25. D. Weichert, A. Hachemi, F. Schwabe. Shakedown analysis of composites. *Mechanics Research Communications* 26 (1999) 309–318.
26. D. Weichert, A. Hachemi, F. Schwabe. Application of shakedown analysis to the plastic design of composites. *Archive of Applied Mechanics* 69 (1999) 623–633.
27. H. Magoaric, S. Bourgeois, O. D'ebordes. Elastic plastic shakedown of 3D periodic heterogeneous media: A direct numerical approach. *International Journal of Plasticity* 20 (2004) 1655–1675.
28. H. Zhang, Y. Liu, B. Xu. Plastic limit analysis of ductile composite structures from micro- to macro-mechanical analysis. *Acta Mech. Solida Sin.* 22 (2009) 73–84.
29. A. Hachemi, M. Chen, G. Chen, D. Weichert. Limit state of structures made of heterogeneous materials. *International Journal of Plasticity* 63 (2014) 124–137.
30. D. De Domenico, A. A. Pisano, P. Fuschi. A FE-based limit analysis approach for concrete elements reinforced with FRP bars. *Compos Struct* 2014;107:594–603.
31. A. A. Pisano, P. Fuschi, D. De Domenico. A layered limit analysis of pinned-joints composite laminates: numerical versus experimental findings. *Composites: Part B* 2012;43:940–52.
32. A. A. Pisano, P. Fuschi, D. De Domenico. Failure modes prediction of multi-pin joints FRP laminates by limit analysis. *Composites: Part B* 2013;46:197–206.
33. A. A. Pisano, P. Fuschi, D. De Domenico. Peak load prediction of multi-pin joints FRP laminates by limit analysis. *Compos Struct* 2013;96:763–72.
34. D. De Domenico. RC members strengthened with externally bonded FRP plates: A FE-based limit analysis approach. *Composites: Part B* 2015;71:159–174.
35. J. Bleyer, C. V. Le, P. de Buhan. Limit analysis of plates and slabs using a meshless equilibrium formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 103 (2015) 894–913.
36. A. Litewka, A. Sawczuk, J. Stanislawska. Simulation of oriented continuous damage evolution *J. Mech. Theor. Appl.* 5 (1884) 675–688.
37. Mosek, The Mosek optimization toolbox for MATLAB manual, 2015

## Determine yield domain of heterogeneous materials using limit analysis method and homogenization method

Nguyen Hoang Phuong

Faculty of Architecture - Civil Engineering - Applied Art, Nguyen Tat Thanh University

**Abstract** This paper presents a method to determine Yield domain of Heterogeneous materials with limit analysis and homogenization method. The limit analysis of Representative Volume Element (RVE) is implemented to find limit loads in various cases. The Domain of various cases represents for the stress of one point in materials. The Discretion of fluctuation displacements in limit analysis problem provides advantages of using periodic boundary constraint. The limit analysis and the homogenization method are performed in Second Order Cone Program (SOCP). The various limit loads of RVE create the limit domain of heterogeneous materials. The Numerical is done and compared with results of other research. It shows the effects of this method.

**Keywords** Limit analysis, homogenization method, Yield strength, Second order cone programming (SOCP)

